MATHÉMATIQUES I

Algèbre et analyse

Options générale et technologique

DURÉE : 4 heures

N.B. — *Il est rappelé aux candidats qu'une pénalisation d'un maximum de 2 points (sur 20) sanctionnera le manque de soin apporté à la présentation des copies (fautes d'orthographe, copie peu lisible...)*

Cette épreuve est constituée d'un exercice et d'un problème

EXERCICE (*sur 8 points*)

I

On note

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1° Calculer A^2. Vérifier la relation :

$$A^2 - 3A + 2I = 0$$

2° En déduire que A est inversible et calculer son inverse A^{-1}.

3° On pose :

$$A^0 = I$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} A^{n+1} = A^n \times A \\ B_n = A^n + A - 2I \end{cases}$$

Montrer successivement que, pour tout n entier naturel, on a :

a. $A^{n+2} - 2A^{n+1} = A^{n+1} - 2A^n$

b. $A^{n+2} = 2A^{n+1} + A - 2I$

c. $B_{n+2} = 2B_{n+1}$

4° Calculer, pour tout n entier naturel, B_n en fonction de B_0 et de n. En déduire A^n en fonction de A et de n et donner l'expression de A^n en fonction de n.

5° Pour tout n entier naturel non nul on note :

$$A^{-n} = (A^{-1})^n$$

Montrer que l'expression obtenue au 4° est encore valable pour les exposants strictement négatifs.

II

Soit E un espace vectoriel réel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et g une application linéaire de E dans E vérifiant :

$$g \circ g - 3g + 2i = \theta$$

où :

$$i \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow E, \\ x \longmapsto x \end{array} \right. \qquad \theta \left| \begin{array}{l} E \to E \\ x \mapsto O_E \end{array} \right. \qquad (O_E \text{ est le vecteur nul de E})$$

On note :

$$h = g - i$$
$$g^0 = i$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g^{n+1} = g^n \circ g$$

1° Montrer que :

$$h \circ h = h$$

Exprimer g^2 et g^3 en fonction de i et de h.

E.S.C.A.E. 1983

2° Établir par récurrence que, pour tout n entier naturel, il existe un couple de réels (a_n, b_n) vérifiant :

$$g^n = a_n i + b_n h.$$

Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n. En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n.

3° Retrouver directement l'expression de g^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.

4° Vérifier alors le résultat établi au I.4°.

PROBLÈME (*sur 12 points*)

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction :

$$f_n \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ (nx + 1)\, e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

On appelle (C_n) la courbe représentative de f_n dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$; Unité : 8 cm.

I

1° *a.* Étudier la continuité de f_n sur $\mathbb{R}_+$.

b. Étudier la dérivabilité de f_n sur $\mathbb{R}_+$. Donner le sens de variation de f_n.

c. Étudier, suivant les valeurs de n, la branche infinie de (C_n); on donnera une équation de l'asymptote à (C_n).

d. Discuter, suivant les valeurs de n, l'existence d'un point d'inflexion I_n de (C_n) dont on donnera les coordonnées.

e. Construire dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes (C_0), (C_1), (C_2).

2° On veut démontrer que, pour tout k entier naturel non nul, f_n admet une dérivée k-ième sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_n^{(k)}(x) = P_{n,k}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}},$$

où $P_{n,k}$ est une fonction polynôme de degré $2k$.

a. Vérifier la propriété pour les valeurs 1, 2, 3 de k, en précisant les fonctions $P_{n,1}$, $P_{n,2}$, $P_{n,3}$.

b. Démontrer la propriété par récurrence; expliciter $P_{n,k+1}$ en fonction de $P_{n,k}$ et de sa dérivée. En déduire $P_{n,4}$.

II

Dans cette partie, n est fixé égal à 1.

1° Soit x_0 un réel strictement positif; montrer que la tangente à (C_1) au point d'abscisse x_0 coupe l'axe $(O, \vec{i})$ en un point d'abscisse $g(x_0)$ où :

$$g(x_0) = \frac{x_0}{1 + x_0 + x_0^2}$$

2° On définit la suite $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ par :

$$\left| \begin{array}{l} u_0 = 1 \\ \forall p \in \mathbb{N}^*, \; u_p = g(u_{p-1}) \end{array} \right.$$

a. Étudier les variations de g sur $[0,1]$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel non nul p, on a :

$$0 < u_p < \frac{1}{p+1}$$

c. Montrer que la suite $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

3° Soit M_p le point de l'axe $(O, \vec{i})$ d'abscisse u_p. Par quelle construction géométrique obtient-on le point M_{p+1} ?

. . . / . . .

4° Pour p entier naturel non nul,

a. Calculer $\frac{1}{u_p} - \frac{1}{u_{p-1}}$ en fonction de u_{p-1}.

b. Montrer que :

$$1 < \frac{1}{u_p} - \frac{1}{u_{p-1}} \leqslant 1 + \frac{1}{p}$$

En déduire que :

$$p < \frac{1}{u_p} - \frac{1}{u_0} \leqslant p + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p}$$

5° *a.* Pour tout k entier naturel supérieur ou égal à 2, comparer $\frac{1}{k}$ et $\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$, et montrer que, pour tout p entier naturel supérieur ou égal à 2 :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p} \leqslant \text{Log } p$$

b. En déduire que la suite $(p u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge; préciser sa limite.

III

1° Justifier l'existence de l'intégrale :

$$\int_0^1 f_n(x)\, dx .$$

2° Démontrer qu'il n'existe qu'une seule valeur de n, notée n_0, pour laquelle la fonction f_n possède sur $\mathbb{R}_+$ une primitive F_n telle que :

$$\begin{cases} F_n(0) = 0 \\ \exists\, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid \forall x \in \mathbb{R}_+^* \ : F_n(x) = (ax^2 + bx + c)\, e^{-\frac{1}{x}} \end{cases}$$

3° Calculer $\int_0^1 f_{n_0}(x)\, dx$.

Interpréter géométriquement le résultat.

FIN